5. Βασικές ακολουθίες- Πλήρεις Μετρικοί Χώροι

Άσκηση 1.
Έστω (X,d) ένας μετρικός χώρος.

(i) Έστω $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια βασική ακολουθία του X και $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία του X τέτοια, ώστε $d(x_n,a_n)<\frac{1}{n}$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Να αποδείξετε ότι η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βασική ακολουθία του X.

(ii) Έστω D ένα πυκνό υποσύνολο του X ώστε κάθε βασική ακολουθία στοιχείων του D να είναι συγκλίνουσα στον X. Τότε, να αποδείξετε ότι ο χώρος (X,d) είναι πλήρης.

Άσκηση 2.
Να αποδείξετε ότι κάθε ομοιόμορφα συνεχής απεικόνιση $f\colon(X,\rho)\to(Y,d)$ απεικονίζει βασικές ακολουθίες του X, σε βασικές ακολουθίες του Y. Ισχύει το αντίστροφο; Η υπόθεση της ομοιόμορφης συνέχειας μπορεί να αντικατασταθεί από απλώς συνέχεια της συνάρτησης f;

Άσκηση 3.
Ας είναι (X,d) ένας μετρικός χώρος και $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ δύο βασικές ακολουθίες στον X. Να αποδείξετε ότι η ακολουθία πραγματικών αριθμών $(d(x_n,y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ είναι συγκλίνουσα.

Άσκηση 4.
Έστω $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μία βασική ακολουθία στοιχείων ενός μετρικού χώρου (X,d). Αν το σύνολο $\{x_n : n\in\mathbb{N}\}$ είναι πεπερασμένο να αποδείξετε ότι υπάρχει $x\in X$ ώστε $x_n\to x$.

Άσκηση 5.
Διατυπώστε τρία κριτήρια χαρακτηρισμού πληρότητας ενός μετρικού χώρου. Έπειτα, εξετάστε ποια απο τα παρακάτω σύνολα είναι πλήρη.

(i) $A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x+y-2z=0\}\subset(\mathbb{R}^3,d_2)$, όπου d_2 η ευκλείδεια μετρική του $\mathbb{R}^3$.

(ii) $B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2>1\}\subset(\mathbb{R}^2,d_2)$, όπου d_2 η ευκλείδεια μετρική του $\mathbb{R}^2$.

(iii) $C=\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\subset(\mathbb{R},|\cdot|)$.

(iv) $D=\left\{1+\dfrac{1}{2^n} : n\in\mathbb{N}\right\}\subset(\mathbb{R},|\cdot|)$.

(v) $G=(0,1)\subset(\mathbb{R},d_0)$, όπου d_0 η διακριτή μετρική.

(vi) $E=\{(-1)^n : n\in\mathbb{N}\}\subset(\mathbb{R},|\cdot|)$.

Άσκηση 6.
• Στο Θεώρημα του Κιβωτισμού του Cantor, εξετάστε αν

(i) η υπόθεση ότι η ακολουθία $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ αποτελείται από κλειστά σύνολα μπορεί να παραληφθεί.

(ii) η υπόθεση ότι η ακολουθία $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι τέτοια ώστε $\operatorname{diam}(F_n)\xrightarrow{n}0$ μπορεί να παραληφθεί.

(iii) το $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty}F_n$ είναι μονοστοιχειακό σύνολο.

• Στό Θεώρημα της Συστολής του Banach, εξετάστε αν

(i) η υπόθεση της πληρότητας του μετρικού χώρου X μπορεί να παραληφθεί.

(ii) η υπόθεση ότι η συνάρτηση $f : (X, d) \to (X, d)$ είναι συστολή (δηλ. υπάρχει $k \in (0, 1)$ ώστε $d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y)$, για κάθε $x, y \in X$) μπορεί να αντικατασταθεί με την υπόθεση ότι $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$, για κάθε $x, y \in X$ με $x \neq y$ (δηλ. η f είναι όπως το λέμε **συσταλτική (contractive)**).

Άσκηση 7.

(i) Έστω S ένα κλειστό υποσύνολο του $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ και $f : S \to S$ μία παραγωγίσιμη συνάρτηση και τέτοια, ώστε $|f'(x)| \leq k < 1$, $\forall x \in S$. Τότε, η εξίσωση $f(x) = x$ έχει μοναδική λύση στο S.

(ii) Έστω $S := [\frac{2}{3}, +\infty)$ και $f : S \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \dfrac{2x + 6}{3x + 2}$, $x \in S$. Να αποδείξετε ότι η $f(S) \subset S$ και ότι η f έχει ακριβώς ένα σταθερό σημείο το οποίο και να προσδιορίσετε.

Άσκηση 8.
Έστω πλήρης μετρικός χώρος (X, d).

(i) Αν $f : X \to X$ είναι μια συνάρτηση συστολής και $g : X \to X$ μια συνάρτηση τέτοια, ώστε $f \circ g = g \circ f$, να αποδείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα $x \in X$ έτσι ώστε $f(x) = x = g(x)$.

(ii) Αν $f : X \to X$ μία συνάρτηση τέτοια, ώστε για κάποιο $k \in \mathbb{N}$ η f^k (όπου $f^k := \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{k-\text{φορές}}$) είναι συνάρτηση συστολής, να αποδείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα σταθερό σημείο για τη συνάρτηση f.

Να δώσετε παράδειγμα συνάρτησης f η οποία να μην είναι συστολή αλλά για κάποιο $k \in \mathbb{N}$ η f^k να είναι συστολή.

Άσκηση 9.
Αν (X_1, d_1) και (X_2, d_2) είναι δύο πλήρεις μετρικοί χώροι, να αποδείξετε ότι ο $X := X_1 \times X_2$ εφοδιασμένος με τη μετρική $d(x, y) = d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2)$, $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2) \in X$ καθίσταται πλήρης μετρικός χώρος.

Άσκηση 10.

(i) Να αποδείξετε ότι αν κάθε το πολύ αριθμήσιμο σύνολο ενός μετρικού χώρου είναι πλήρες, τότε και ο μετρικός χώρος είναι πλήρης.

(ii) Να αποδείξετε ότι αν κάθε φραγμένο υποσύνολο ενός μετρικού χώρου έχει τουλάχιστον ένα σημείο συσσώρευσης, τότε ο μετρικός χώρος είναι πλήρης.

Άσκηση 11. (Διαστολή)
Ας είναι (X, d) πλήρης μετρικός χώρος και $S \neq \emptyset$ υποσύνολο του X. Υποθέτουμε ακόμη ότι η $f : S \to X$ είναι μία επί συνάρτηση για την οποίο υπάρχει $k > 1$ τέτοιο, ώστε:

$$d(f(x), f(y)) \geq kd(x, y), \ \forall \ x, y \in S.$$

Να αποδείξετε ότι η f έχει ακριβώς ένα σταθερό σημείο στο S.

Άσκηση 12.

(i) Να αποδείξετε ότι η πληρότητα δεν είναι τοπολογική ιδιότητα (Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε την ισοδύναμη μετρική $d(x,y) = |\operatorname{Arctan} x - \operatorname{Arctan} y|$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ με την ευκλείδεια, ως παράδειγμα).

(ii) Αν $f\colon (X,\rho) \to (Y,d)$ 1-1, επί, συνεχής και η f^{-1} είναι ομοόμορφα συνεχής. Να αποδείξετε ότι ο (Y,d) είναι πλήρης.

Υποδείξεις Ασκήσεων

Άσκηση 1.

(i) Θα δείξουμε ότι η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βασική ακολουθία του X. Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βασική ακολουθία του X τότε υπάρχει n_1 ώστε για κάθε $n,m > n_1$ να ισχύει $d(a_n,a_m) < \frac{\varepsilon}{3}$. Επίσης, υπάρχει n_2 ώστε για κάθε $n > n_2$ να ισχύει $\frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{3}$ και n_3 ώστε για κάθε $m > n_3$ να ισχύει $\frac{1}{m} < \frac{\varepsilon}{3}$. Θέτοντας $n_0 := \max\{n_1,n_2,n_3\}$ για κάθε $m,n > n_0$ ισχύει:

$$d(x_n,x_m) \leq d(x_n,a_n) + d(a_n,a_m) + d(a_m,x_m) < \frac{1}{n} + d(a_n,a_m) + \frac{1}{m} < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

(ii) Έστω $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ βασική ακολουθία του X και θα αποδείξουμε ότι υπάρχει $a \in X$ ώστε $a_n \to a$. Έστω λοιπόν $\varepsilon > 0$. Εφόσον η $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ κείται στον X, από την πυκνότητα του D θα κείται και στο $\overline{D}$. Άρα, υπάρχει $(x_n) \subset D$ με $d(x_n,a_n) < \frac{1}{n}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Οπότε, από το ερώτημα (i) η ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βασική στο D. Οπότε, από την υπόθεση, η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι συγκλίνουσα στον X. Συνεπώς, υπάρχει $a \in X$ ώστε $x_n \to a$. Οπότε υπάρχει n_1 ώστε για κάθε $n > n_1$ να ισχύει $d(x_n,a) < \frac{\varepsilon}{2}$. Επίσης, υπάρχει n_2 ώστε για κάθε $n > n_2$ να ισχύει $\frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$. Θέτοντας $n_0 := \max\{n_1,n_2\}$ για κάθε $n > n_0$ έχουμε:

$$d(a_n,a) \leq d(a_n,x_n) + d(x_n,a) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Άσκηση 2.

Αποδεικνύεται εύκολα με άμεση εφαρμογή του ορισμού της βασικής ακολουθίας και της ομοιόμορφής συνέχειας. Το αντίστροφο δεν ισχύει πχ η $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$ δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής (γιατί;) αλλά αν $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μία βασική ακολουθία στο $\mathbb{R}$ και άρα συγκλίνουσα, δηλ. υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ με $x_n \to x$, τότε λόγω συνέχειας της f η $f(x_n) \to f(x) \in \mathbb{R}$. Άρα, η ακολουθία $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ είναι επίσης βασική. Η υπόθεση της ομοιόμορφης συνέχειας δεν μπορεί να αντικατασταθεί από την ασθενέστερη υπόθεση της συνέχειας, για παράδειγμα η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x}, x > 0$ είναι συνεχής, όχι ομοιόμορφα συνεχής (γιατί;), η ακολουθία $x_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$ είναι βασική (ως συγκλινουσα στον $\mathbb{R}$), αλλά η $f(x_n) = n$, $n \in \mathbb{N}$ δεν είναι βασική ακολουθία πραγματικών αριθμών.

Άσκηση 3

Αρκεί να αποδείξουμε ότι η ακολουθία **πραγματικών** αριθμών είναι βασική στον $\mathbb{R}$, δηλαδή για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει n_0, ώστε για κάθε $n,m > n_0$ να ισχύει $|d(x_n,y_n) - d(x_m,y_m)| < \varepsilon$. Έπειτα, με χρήση της ανισότητας $|d(a,b) - d(c,e)| \leq d(a,c) + d(b,e)$, για κάθε $a,b,c,e \in X$ προκύπτει άμεσα το ζητούμενο.

Άσκηση 4.

Εφόσον η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βασική ακολουθία τότε για καθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για όλα τα $n,m \geq n_0$ να ισχύει $d(x_n,x_m) < \varepsilon$. Επειδή το σύνολο $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι πεπερασμένο, υπάρχει $x \in X$ ώστε το $\{n \in \mathbb{N} : x_n = x\}$ να είναι άπειρο. Οπότε, υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ με $m \geq n_0$ και $x_m = x$.

Συνεπώς, από τα δυο προηγούμενα έχουμε $d(x_n, x) < \varepsilon$, για κάθε $n \geq n_0$. Επομένως, $x_n \to x$.

Άσκηση 5.
Διατυπώστε τον ορισμό του πλήρη μετρικού χώρου (Κριτήριο 1). Διατυπώστε το Θεώρημα του Κιβωτισμού Cantor (Κριτήριο 2). Διατυπώστε την Πρόταση η οποία σε πλήρη μετρικό χώρο ταυτίζει την πληρότητα ενός υποσυνόλου του με την κλειστότητα αυτού (Κριτήριο 3).

(i) Το A είναι κλειστό υποσύνολο του πλήρη μετρικού χώρου $\mathbb{R}^3$, ως αντίστροφη εικόνα του κλειστού συνόλου $\{0\}$ μέσω της συνεχούς (ως γραμμική) συνάρτησης

$$f(x, y, z) = x + y - 2z, \ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Άρα, είναι πλήρες υποσύνολο του $\mathbb{R}^3$

(ii) Το B δεν είναι κλειστό υποσύνολο του πλήρη μετρικού χώρου $\mathbb{R}^2$ (γιατί;). Άρα, το B όχι πλήρες.

(iii) <u>**α΄ τρόπος:**</u> Η άρρητη ακολουθία $x_n = 1 + \dfrac{\sqrt{2}}{n}$, $n \in \mathbb{N}$ είναι βασική, ως συγκλινουσα στο 1 αλλά το 1 είναι ρητός αριθμός. Άρα, το $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ δεν είναι πλήρες.

<u>**β΄ τρόπος:**</u> Το $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ δεν είναι κλειστό, άρα δεν είναι πλήρες.

<u>**γ΄ τρόπος:**</u> Η ακολουθία $F_n = \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ αποτελείται από κλειστά σύνολα στο $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, είναι φθίνουσα με $\operatorname{diam}(F_n) \to 0$ αλλά $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \emptyset$ (εξηγήστε το).

(iv) Είναι $\overline{D} = D \cup \{1\} \neq D$. Οπότε, το D δεν είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Άρα, δεν είναι πλήρες.

(v) Το G είναι κλειστό στο διακριτό $(\mathbb{R}, d_0)$ ως υποσύνολό του και επίσης, κάθε διακριτός μετρικός χώρος πάντα είναι πλήρης. Άρα, το G είναι πλήρες υποσύνολο του $(\mathbb{R}, d_0)$.

(vi) Έστω μια βασική ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ στοιχείων του E. Τότε, αναγκαστικά η ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι τετικά σταθερή ίση είτε με 1, είτε με -1 (γιατί;). Συνεπώς, συγκλίνει στο E. Άρα, το E είναι πλήρες.

Άσκηση 6.
• Για το Θεώρημα Cantor:

(i) Θέτουμε $F_n = \left(0, \frac{1}{n}\right), n \in \mathbb{N}$ και ότι είναι μία φθίνουσα ακολουθία μη κλειστών με $\operatorname{diam}(F_n) \to 0$ και $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \emptyset$ (γιατί;).

(ii) Θέτουμε $F_n = [n, \infty), n \in \mathbb{N}$ και ότι είναι μία φθίνουσα ακολουθία κλειστών τέτοια, ώστε $\operatorname{diam}(F_n) \nrightarrow 0$ και $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \emptyset$ (γιατί;).

(iii) Γενικά, αν $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι μια ακολουθία ώστε $\operatorname{diam}(F_n) \to 0$, τότε το $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ είναι το $\emptyset$ ή μονοστοιχειακό σύνολο. Πράγματι, αν $x \neq y$ τέτοια, ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $x, y \in F_n$.

Τότε, αφού για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $0 \leq d(x,y) \leq \operatorname{diam}(F_n)$, παίρνοντας τα όρια για $n \to \infty$ συνάγουμε $d(x,y) = 0$ ή $x = y$ πράγμα άτοπο. Με την επιπρόσθετη υπόθεση ότι ισχύει το Θεώρημα Cantor αυτό σημαίνει ότι αναγκαστικά το $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ μονοστοιχειακό σύνολο.

- Για το Θεώρημα Συστολής του Banach:

(i) Αν $X = (0,1)$ (μη πλήρης) και $f\colon (X, |\cdot|) \to (X, |\cdot|)$ με $f(x) = \frac{x}{2}$, $x \in X$, τότε f συστολή και η f δεν έχει σταθερό σημείο στον X.

(ii) Αν θέσουμε $f(x) = \log(1+e^x), x \in \mathbb{R}$, τότε από το ΘΜΤ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ με $x \neq y$, υπάρχει $x_0 \in (x,y)$ έτσι, ώστε

$$|f(x) - f(y)| \leq \left| \frac{e^{x_0}}{1+e^{x_0}} \right| \leq |x-y| < 1 \cdot |x-y|.$$

Ωστόσο, η f δεν έχει σταθερό σημείο αφού η εξίσωση $f(x) = x$ είναι αδύνατη.

Άσκηση 7.

(i) Με άμεση εφαρμογή του ΘΜΤ προκύπτει ότι η f είναι συστολή, οπότε εφαρμόζοντας το Θεώρημα Συστολής Banach (εξετάζοντας πρώτα μία προς μία τις υποθέσεις) έχουμε ότι η f έχει μοναδικό σταθερό σημείο.

(ii) Θέτουμε $y = \dfrac{2x+6}{3x+2}$. Οπότε, $x = \dfrac{2y-6}{2-3y}$ το οποίο είναι $\geq \frac{2}{3}$. Άρα, $\frac{2}{3} \leq y \leq \frac{11}{6}$. Συνεπώς, $f(S) = \left[\frac{2}{3}, \frac{11}{6}\right]$. Για κάθε $x < y$, $x, y \in S$ από το ΘΜΤ η f είναι συστολή με σταθερά $k = \frac{7}{8}$ (εξηγήστε το αναλυτικά). Άρα, από το Θεώρημα Συστολής Banach η f έχει μοναδικό σταθερό σημείο (και εύκολα από την επίλυση της εξίσωσης $f(x) = x$ προκύπτει ότι το σταθερό σημείο είναι το $x = \sqrt{2}$).

Άσκηση 8.

(i) Από την Αρχή της Συστολής (Banach) υπάρχει μοναδικό $x \in X$ ώστε $f(x) = x$. Συνεπώς, από αυτό και τη υπόθεση έπεται

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = g(f(x)) = g(x).$$

Από τη μοναδικότητα του $x \in X$, συνάγουμε $g(x) = x$.

(ii) Από την Αρχή της Συστολής (Banach) υπάρχει ακριβώς ένα $x \in X$ ώστε για κάποιο $k \in \mathbb{N}$, $f^k(x) = x$. Τότε, εφαρμόζοντας την f παίρνουμε $f(f^k(x)) = f^k(f(x)) = f(x)$. Όμως, από τη μοναδικότητα του $x \in X$ αναγκαστικά $f(x) = x$. Μένει να αποδείξουμε ότι το x είναι μοναδικό σταθερό σημείο της f. Έστω $y \in X$ με $y \neq x$ ένα άλλο σταθερό σημείο της f, δηλαδή, $f(y) = y$. Έτσι, συνάγουμε ότι

$$f^k(y) = f^{k-1}(f(y)) = f^{k-1}(y) = f^{k-2}(f(y)) = f^{k-2}(y) = \cdots = f(f(y)) = f(y) = y.$$

Άρα, y σταθερό σημείο της f^k. Ωστόσο, το x είναι μοναδικό σταθερό σημείο της f^k. Συνεπώς, $x = y$ και αυτό είναι άτοπο.

Η συνάρτηση Dirichlet $f(x) = \begin{cases} 1 \;, & x \in \mathbb{Q} \\ 0 \;, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$, είναι ασυνεχής (άρα, όχι συστολή) αλλά η $f \circ f$ είναι συστολή, αφού είναι σταθερή και ίση με 1.

Άσκηση 9.

Έστω μια βασική ακολουθία $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στοιχείων του X. Θα αποδείξουμε ότι τούτη είναι συγκλίνουσα στον X. Δηλαδή, αρκεί να αποδείξουμε ότι υπάρχει $(x, y) \in X$ έτσι, ώστε $(x_n, y_n) \to (x, y)$ και εφόσον η d είναι μετρική γινόμενο αρκεί να αποδείξουμε ότι $x_n \to x$ και $y_n \to y$. Εύκολα τώρα μπορούμε να δούμε ότι η βασικότητα της $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στον X, συνεπάγεται τη βασικότητα των $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στους χώρους X_1 και X_2, αντίστοιχα (εξηγήστε το λίγο πιο εκτενώς εργαζόμενοι με τον ορισμό). Έτσι, από την πληρότητα των X_1, X_2 παίρνουμε ότι οι ακολουθίες $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλινουν σε κάποια $x \in X_1$ και $y \in X_2$, αντίστοιχα.

Άσκηση 10.

(i) Έστω μια βασική ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στοιχείων ενός μετρικού χώρου (X, d). Το σύνολο $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι το πολύ αριθμήσιμο και άρα από την υπόθεση είναι πλήρες υποσύνολο του X. Άρα, η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ως βασική ακολουθία του A θα είναι και συγκλινουσα στο A, κατά συνέπεια και στον X.

(ii) Υποθέτουμε (προς απαγωγή σε άτοπο) ότι ο (X, d) δεν είναι πλήρης. Άρα, υπάρχει κάποια βασική ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στοιχείων του X, η οποία να μην είναι συγκλινουσα στον X. Τότε, το σύνολο $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ λόγω βασικότητας της $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένο. Οπότε, από την υπόθεση θα έχει τουλάχιστον ένα σημείο συσσώρευσης. Δηλαδή, θα υπάρχει κάποια υπακολουθία της $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνουσα (προς αυτό). Συνεπώς, από τούτο και το γεγονός ότι η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βασική, θα είναι και συγκλινουσα στον X, πράγμα άτοπο.

Άσκηση 11.

Αρχικά η $f \colon S \xrightarrow{\text{επί}} X$ είναι $1-1$. Πράγματι, αν $f(x) = f(y)$, τότε

$$0 = d(f(x), f(y)) \geq kd(x, y).$$

Οπότε, $d(x, y) = 0$ ή $x = y$. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει η $f^{-1} \colon X \to S$ και μάλιστα από τη σχέση

$$d(f(x), f(y)) \geq kd(x, y)$$

παίρνουμε

$$d(f^{-1}(x), f^{-1}(y)) \leq \frac{1}{k} d(x, y), \;\; x, y \in X$$

και αφού $\frac{1}{k} < 1$ η f^{-1} είναι συνάρτηση συστολής. Εφαρμόζοντας τώρα την Αρχή της συστολής έχουμε ότι υπάρχει μοναδικό $x \in X$ ώστε $f^{-1}(x) = x$ ή ισοδύναμα $f(x) = x$.

Άσκηση 12.

(i) Εφόσον, η ακολουθία $(\arctan(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει (ως προς την ευκλείδεια μετρική) στο $\frac{\pi}{2}$, όταν το $n \to +\infty$, για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$, για κάθε $n, m \geq n_0$ ισχύει

$$d(x_m, x_n) = |\arctan(x_m) - \arctan(x_n)| < \varepsilon.$$

Συνεπώς, η ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βασική στον $(\mathbb{R}, d)$. Εντούτοις, δεν είναι συγκλίνουσα στον $(\mathbb{R}, d)$, διότι αν ήταν, επειδή οι μετρικές d και $|\cdot|$ είναι ισοδύναμες αναγκαστικά θα ήταν συγκλίνουσα στον $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ πράγμα αδύνατον, επειδή $x_n \to +\infty$.

(ii) Έστω βασική ακολουθία $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στον (Y,d) και θα αποδείξουμε ότι υπάρχει $b_0 \in Y$ ώστε $b_n \to b_0$. Θέτοντας $a_n = f^{-1}(b_n),\ n \in \mathbb{N}$. Από την ομοιόμορφη συνέχεια της f^{-1} και την Άσκηση 2, η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βασική στον (X,ρ). Επειδή τώρα ο (X,ρ) είναι πλήρης μετρικός χώρος, υπάρχει $a_0 \in X$ ώστε $a_n \to a_0$. Οπότε, από τη συνέχεια της f και την Αρχή της Μεταφοράς, συνάγουμε

$$f(a_0) := b_0 = \lim_n f(a_n) = \lim_n b_n.$$